بنام خدا

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

ماخ

دفترچه سوالات

مرحله اول

پنجمین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر سال ۱۳۷۳

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سوالات	
	مساله‌های تشریحی	سوالات چند گزینه‌ای
۲۰۰	۱۵	۱۵

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۱۵ سؤالا تستی و ۱۵ مسأله‌ی تشریحی** و وقت آن **۲۰۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

www.MAAKH.ir

کلیه حقوق این سوالات برای ماخ محفوظ است.

۱- نقطه‌ی تمایز روی محیط یک دایره قرار دارد. تعداد ۵ ضلعی‌هایی که می‌توان با این نقاط ساخت چند تاست؟

الف) ۳۰۲۴۰ ب) ۶۰۴۸ ج) ۲۵۲ د) ۱۰۰۸ هـ) ۱۲۰

۲- ٤ نفر راننده که هر کدام یک اتومبیل دارند در یک محل کار می‌کنند. این ٤ نفر به چند طریق می‌توانند اتومبیل‌های خود را با هم عوض کنند به قسمی که هیچ کدام اتومبیل خود را نرانند؟

الف) ۲۰ ب) ۹ ج) ۱۸ د) ٦ هـ) ٤

۳- در مربع ۳ × ۳ مقابل، اعداد ۱,۲,۳,...,۹ را طوری قرار می‌دهیم که حاصل جمع هر ستون و هر سطر و هر قطر با هم برابر باشند. مجموع اعداد واقع در چهار گوشه‌ی این مربع چیست؟

		۱

الف) ۲۰ ب) ۲٤ ج) ۱۸

د) ۳۰ هـ) ۲۵

۴- مبلغ ۳٦ تومان پول را بین سه برادر تقسیم کرده‌ایم. به هر یک از آن‌ها به اندازه‌ی سن خود پول برحسب تومان رسیده‌است. برادر کوچک‌تر نصف پول خود را به تساوی بین دو برادر دیگر تقسیم می‌کند. برادر میانی و بعد برادر بزرگ‌تر همین کار را انجام می‌دهند. در پایان پول هر سه برادر مساوی می‌شود. برادر میانی چند سال دارد؟

الف) ۱۰ ب) ۱۰/۵ ج) ۱۱ د) ۱۱/۵ هـ) ۱۲

۵- یک مکعب به ضلع ۳ را درنظر بگیرید که در مرکز هر یک از مکعب‌های کوچک آن یک نقطه گذاشته شده است (مجموعا ۲۷ نقطه). چند تا مجموعه‌ی سه‌تایی از این نقاط روی یک خط مستقیم قرار دارند؟

الف) ٤۸ ب) ۳٦ ج) ٤۹ د) ٤۳ هـ) ۳۷

۶- تعداد اعداد سه رقمی بزرگ‌تر از ۵۳۰ که ارقام متمایز دارند کدام است؟

الف) ۲۰۱ ب) ۲٤۰ ج) ۳٤۵ د) ۳۳۵ هـ) ۳۳٦

۷- از نقشه‌ی شبکه‌ی راه‌های یک استان اطلاعات زیر را به دست آورده‌ایم:

۱) از هر شهری می‌توان به سایر شهرها مسافرت کرد.

۲) کم‌ترین فاصله‌ی بین دو شهر ۲۸ کیلومتر است.

۳) بیش‌ترین فاصله‌ی بین دو شهر ۱۳۷٤ کیلومتر است.

٤) تعداد شهرها ۷ تاست.

۵) شهری وجود دارد که مستقیما به ۳ شهر دیگر جاده دارد.

اگر طول کل جاده‌هایی که بین این ۷ شهر کشیده شده است n کیلومتر باشد، آنگاه:

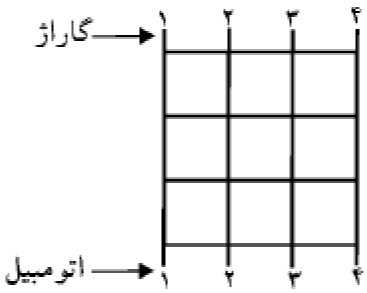
الف) $n \geq ۱۴۳۰$ ب) $n \leq ۲۷۴۸$ ج) $n = ۱۴۰۲$

د) $n \geq ۱۴۰۲$ هـ) $۱۳۷۴ \leq n \leq ۲۷۴۸$

۸- می‌خواهیم ۸ عدد کتاب یکسان را بین ٤ نفر تقسیم کنیم به قسمی که به نفر دوم حداکثر ۲ کتاب و به نفر سوم حداقل ۲ کتاب و به سایر نفرات حداقل ۱ کتاب برسد. تعداد حالات ممکن برابر است با:

الف) ۳۱ ب) ۳۵ ج) ۷۰ د) ٦۵ هـ) ۵٦

۹- نقشه‌ی خیابان‌های شهری به شکل مقابل است. (خیابان‌های عمودی رو به بالا یک‌طرفه‌اند.) می‌خواهیم اتومبیل‌های ۱ تا ٤ را به گاراژهایی که در شکل نشان داده شده است ببریم به طوری که از هر خیابان حداکثر یک اتومبیل عبور کند. کدام یک از دنباله‌های زیر (از چپ به راست) می‌تواند شماره‌های اتومبیل‌ها در گاراژهای ۱ تا ٤ باشد؟



الف) ۱,۳,۴,۲ ب) ۳,۱,۴,۲ ج) ۲,۱,۴,۳

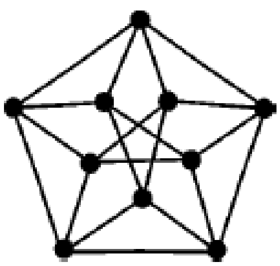
د) ۲,۳,۱,۴ هـ) هیچکدام

۱۰- یک صفحه‌ی شطرنجی نامتناهی را درنظر بگیرید. مهره‌ی اسب در این صفحه به این صورت حرکت می‌کند که دو خانه در یک جهت (افقی یا عمودی) و یک خانه در جهت دیگر حرکت می‌کند.

حداقل تعداد حرکت‌های لازم برای این که اسب بتواند خود را از خانه‌ی (۰,۰) به خانه‌ی (۱۳۷۴,۱۳۷۴) برساند، چند تاست؟

الف) ٤٥٨ ب) ٩١٦ ج) ۱۳۷٥ د) ٦٨٧ هـ) ۱۳۷٤

۱۱- در شکل مقابل دایره‌های سیاه را راس و هر پاره‌خط بین دو دایره‌ی سیاه را یک یال می‌نامیم. کدام یک از گزاره‌های زیر در مورد آن صحیح است؟



الف) می‌توان راس‌های آن را با ٤ رنگ متفاوت چنان رنگ کرد که رنگ هر دو راسی که با یک یال به هم متصلند متفاوت باشد.

ب) می‌توان اعداد ۱ تا ۱۰ را به راس‌های آن نسبت داد به قسمی که راس شماره‌ی i به راس‌های $i-1$ و $i+1$ وصل باشد $(2 \le i \le 9)$ و راس ۱ نیز به ۱۰ وصل باشد.

ج) می‌توان این شکل را بدون برداشتن قلم از روی کاغذ رسم کرد. (راس‌ها را نقطه و یال‌ها را پاره‌خط در نظر بگیرید.)

د) هر سه مورد فوق صحیح است.

هـ) هیچکدام از موارد فوق صحیح نیست.

۱۲- خروجی الگوریتم زیر چند است؟ (منظور از $A[i]$ در این الگوریتم عنصر i ام یک دنباله به نام A است.)

به ازای i از ۱ تا ٥ مقدار $A[i]$ را مساوی i قرار بده.

به ازای i از ۳ تا ۹ کارهای زیر را انجام بده:

به ازای j از ۱ تا ٥ کارهای زیر را انجام بده.

در صورتی که $1 \le i-j \le 5$، جای $A[i]$ و $A[i-j]$ را با هم عوض کن.

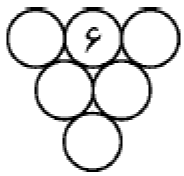
مقدار $A[i]$ را چاپ کنید.

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ٤ هـ) ٥

۱۳- تعدادی از دانش‌آموزان یک مدرسه در اردوی یک هفته‌ای شرکت کردند. در هر روز ۳ نفر از دانش‌آموزان مسئولیت تهیه‌ی غذا را بر عهده داشتند. پس از پایان اردو معلوم شد که هیچ دو نفری از دانش‌آموزان بیش از یک بار با هم مسئول تهیه‌ی غذا نبوده‌اند. اگر n تعداد دانش‌آموزان شرکت‌کننده در اردو باشد، آنگاه:

الف) $n = 21$ ب) $n = 7$ ج) $n \ge 7$ د) $n < 9$ هـ) $n \ge 9$

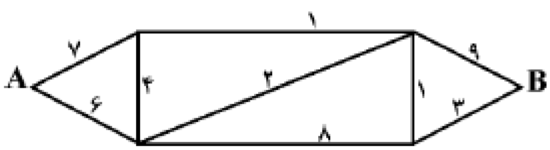
۱۴- ٦ دایره‌ی روبه‌رو داده شده‌اند:



می‌خواهیم اعداد ۱ تا ۵ را در دایره‌های خالی بنویسیم به طوری که عدد نوشته شده در هر دایره تفاضل اعداد نوشته شده در دو دایره‌ی بالایی آن باشد. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ هـ) ٤

۱۵- بین منبع آب A و مصرف کننده‌ی B به صورت مقابل لوله‌کشی شده است: عددی که بر روی هر لوله نوشته شده است، نشان دهنده‌ی حداکثر ظرفیت انتقال آن لوله (لیتر بر ثانیه) است.



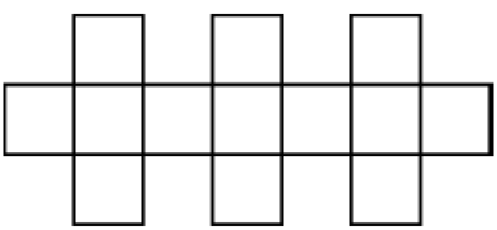
مصرف کننده حداکثر چند لیتر بر ثانیه آب دریافت خواهد کرد؟

الف) ۱۳ ب) ۷ ج) ۱۲

د) ٤۱ هـ) ۱۱

۱۶- در یک صفحه‌ی شطرنجی مربع به ضلع ۱۳۷٤ متر آیا می‌توان یک چندضلعی با اضلاع افقی و عمودی که طول هر ضلع آن بر حسب متر عدد صحیح باشد رسم کرد که محیط آن ۱۹۹۵ متر شود؟

۱۷- در شکل زیر که از ٤۰ عدد چوب کبریت ساخته شده ۱۳ مربع ۱×۱ دیده می‌شود: آیا می‌توان با برداشتن ۹ چوب کبریت، شکلی ایجاد کرد که در آن هیچ مربعی دیده نشود؟



۱۸- ۱۱ سنگ‌ریزه در اختیار داریم. دو بازی‌کن با این سنگ‌ریزه‌ها این بازی را انجام می‌دهند:
هر بازیکن در نوبت خودش ۳،۲،۱ یا ٤ سنگ‌ریزه بر می‌دارد. وقتی که سنگ‌ریزه‌ها تمام شد. تعداد سنگ‌ریزه‌هایی که هر یک از بازیکنان برداشته‌اند را می‌شماریم. هر بازیکن که به تعداد زوجی سنگ‌ریزه برداشته بود، برنده است. آیا بازیکن اول می‌تواند طوری بازی کند که حتما برنده شود؟

۱۹- یک دنباله‌ی $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ متنوع نامیده می‌شود. اگر این شرایط برقرار باشند:
برای هر $(0 \le i \le n)i$، a_i و a_{i+1} متفاوت باشند.

اگر $n > 1$، دنباله $a_0, a_2, \dots, a_{2[\frac{n}{2}]}$ نیز یک دنباله‌ی متنوع باشد.([x] یعنی بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی با x)

برای مثال A,B,C,A,D,C یک دنباله‌ی متنوع است.

اگر $a_i \in \{A,B,C\}$، آیا دنباله‌ی متنوع $a_۰, a_۱, \ldots, a_{۱۳۷۴}$ وجود دارد به طوری که دنباله‌ی $a_۰, a_۳, a_۶, \ldots, a_{۱۳۷۴}$ نیز متنوع باشد؟

۲۰- در یک نقشه شبکه‌ی راه‌های منطقه، هر شهر دقیقا به سه شهر دیگر به طور مستقیم جاده دارد. آیا امکان دارد که با بستن یک از این جاده‌ها ارتباط بعضی از شهرها را با بعضی از شهرهای دیگر قطع کرد؟

۲۱- برای هر عدد صحیح غیر منفی n، عدد $a_{n+۱}$ از a_n بر اساس قانون زیر به‌دست می‌آید:

اگر آخرین رقم سمت راست عدد از ۵ بیش‌تر باشد، $a_{n+۱} = ۹a_n$. در غیر این صورت، رقم سمت راست a_n را کنار می‌گذاریم و ارقام باقی‌مانده نمایشگر $a_{n+۱}$ است. اگر $a_{n+۱}$ شامل هیچ رقمی نباشد. کار پایان می‌یابد. آیا به ازای هر $a_۰$ دلخواه این فرایند پایان‌پذیر است؟

۲۲- یک نوار داریم که به n خانه تقسیم شده است. خانه‌ها را به ترتیب از ۱ تا n شماره‌گذاری کرده‌ایم. دو عد مهره در خانه‌های n و n-1 قرار گرفته‌اند. دو بازی‌کن بازی زیر را انجام می‌دهند:

هر بازیکن در نوبت خود می‌تواند یکی از مهره‌ها(هرکدام) را برداشته و در یک خانه‌ی خالی با شماره‌ی کم‌تر قرار دهد. بازی‌کنی که آخرین حرکت را انجام دهد برنده است. در صورتی که n=9 باشد آیا نفر اول می‌تواند طوری بازی کند که همیشه برنده باشد؟

۲۳- یک ماتریس $M_{۳\times۳}$ در نظر بگیرید که درایه‌هایش از علایم $\{<,>,=\}$ باشد. ساختن توابع f و g با خواص زیر مورد نظر است.

اگر مقدار M_{ij} مساوی $<$ باشد، آن‌گاه $f(i) < g(j)$

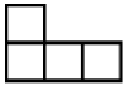
اگر مقدار M_{ij} مساوی $>$ باشد، آن‌گاه $f(i) > g(j)$

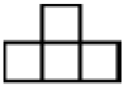
اگر مقدار M_{ij} مساوی = باشد، آن‌گاه $f(i) = g(j)$

ماتریس ۳×۳ زیر که مولفه‌هایش مشخص شده‌اند تعریف شده است:

$$\begin{bmatrix} < & < & = \\ = & < & > \\ < & < & > \end{bmatrix}$$

آیا برای ماتریس فوق توابع f و g با خواص مورد نظر را می‌توان یافت؟


نوع ۱


نوع ۲

سوالات ۲۴ و ۲۵ و ۲٦

موزاییک‌ها ی از انواع زیر وجود دارند:

منظور از فرش کردن یک صفحه با موزاییک‌ها پوشاندن تمام خانه‌های صفحه با موزاییک‌ها است. به طوری که موزاییک‌ها روی هم قرار نگیرند.

۲۴- آیا با موزاییک‌هایی از نوع ۱ می‌توان یک صفحه شطرنجی ٦×٦ را فرش کرد؟

۲۵- آیا با موزاییک‌هایی از نوع ۲ می‌توان یک صفحه شطرنجی ٦×٦ را فرش کرد؟

۲٦- آیا با موزاییک‌هایی از نوع ۲ می‌توان یک صفحه شطرنجی ۱۰۰×۱۰۰ را فرش کرد؟

سوالات ۲۷ و ۲۸

سه میله با شماره‌های ۲،۱ و ۳ و چهار مهره سوراخ‌دار با شماره‌های ۱ تا ٤ مطابق شکل زیر داده شده است:

می‌خواهیم با حرکت دادن این مهره‌ها و رعایت قواعد زیر کلیه‌ی مهره‌ها را به صورت زیر بر میله‌ی سوم ببریم:

در هر حرکت تنها یک مهره حرکت داده شود.

هیچ‌گاه مهره‌ای با شماره‌ی بزرگ‌تر بر روی مهره با شماره‌ی کوچک‌تر قرار نگیرد.

۲۷- آیا می‌توان با کم‌تر از ۱۱ حرکت این کار را انجام داد؟

۲۸- در صورتی که ۵ مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ داشته باشیم به طوری که مهره‌های ۳،۱ و ۵ در میله‌ی اول و مهره‌های ۲ و ٤ در میله‌ی دوم باشندو آیا می‌توان با کم‌تر از ۲۲ حرکت این مسئله را حل کرد؟

۲۹- آرایه‌ی a با n عنصر به صورت صعودی مرتب شده است. می‌خواهیم ببینیم که آیا عنصر x در آرایه‌ی a وجود دارد یا خیر. برای این کار الگوریتم زیر را پیشنهاد می‌کنیم:

i را مساوی ۱ و j را مساوی با n قرار بده.

k را مساوی با $\left[\frac{i+j}{۲}\right]$ قرار بده.

اگر $a_k < x$، در این صورت i را مساوی با k+1 قرار بده، در غیر این صورت j را مساوی با k-1 قرار بده.

اگر $a_k = x$، در این صورت x در آرایه‌ی a وجود دارد؛ به مرحله «۷» برو.

اگر i≥j ، در این صورت x در آرایه‌ی a وجود ندارد؛ به مرحله «۷» برو.

برو به مرحله‌ی «۲».

پایان.

آیا این الگوریتم برای تمام مقادیر x درست کار می‌کند؟

۳۰- اگر الگوریتم سوال قبل را به صورت زیر تغییر دهیم. پاسخ چیست؟

i را مساوی ۱ و j را مساوی با n قرار بده.

k را مساوی با $[\frac{i+j}{۲}]$ قرار بده.

اگر $x > a_k$، در این صورت j را مساوی با k قرار بده، در غیر این صورت i را مساوی با k+1 قرار بده.

اگر i≠j ، در این صورت به مرحله‌ی «۲» برو.

اگر $a_{\left[\frac{i+j}{۲}\right]} = x$، در این صورت x در آرایه‌ی a وجود دارد؛ به مرحله «۷» برو.

در غیر این صورت x در آرایه‌ی a وجود ندارد.

پایان.

«پاسخنامه تشریحی»

۱- گزینه (۳) درست است.

بدیهی است که با هر ۵ نقطه یک پنج ضلعی ساخته می‌شود، پس تعداد آن‌ها برابر $\binom{۱۰}{۵}$ یا ۲۵۲ می‌باشد.

۲- گزینه (۲) درست است.

تعداد طرق تقسیم ٤ اتومبیل بین ٤ نفر به طوری که X صاحب اتومبیل خود باشد را با |X|، تعداد آن طرق به طوری که هم X صاحب اتومبیل خود و هم Y صاحب اتومبیل خود باشند را با |X∩Y|،... نمایش می‌دهیم، بنابراین:

$$\begin{aligned}
? = \left|\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}\cap\bar{D}\right| &= |M|-|A|-|B|-|C|-|D| \\
&+|A\cap B|+|A\cap C|+|A\cap D| \\
&+|B\cap C|+|B\cap D|+|C\cap D| \\
&-|A\cap B\cap C|-|A\cap B\cap D|-|A\cap C\cap D|-|B\cap C\cap D|+|A\cap B\cap C\cap D|
\end{aligned}$$

$$= ۴!-۴(۳!)+۶(۲!)-۴(۱!)+(۰!)=۹$$

۳- گزینه (۱) درست است.

چون مجموع اعداد از ۱ تا ۹ برابر ٤٥ می‌باشد، بنابراین معلوم است که مجموع اعداد واقع در هر سطر، هر ستون و نیز قطرها برابر ۱۵ می‌باشد. خواهیم داشت:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

$$\left.\begin{aligned} a+e+i&=۱۵\\ b+e+h&=۱۵\\ c+e+g&=۱۵\\ d+e+f&=۱۵\end{aligned}\right\}\Rightarrow (a+b+c+d+e+f+g+h+i)+۳e=۶۰\Rightarrow ۴۵+۳e=۶۰\Rightarrow e=۵$$

$$\left.\begin{aligned} a+e+i&=۱۵\\ c+e+g&=۱۵\end{aligned}\right\}\Rightarrow a+i+c+g=۲۰$$

نمونه‌ای از شکل پر شده به صورت زیر می‌باشد:

۸	۳	۴
۱	۵	۹
۶	۷	۲

٤- گزینه (۲) درست است.

راه‌حل اول:

سن برادر بزرگ‌تر را x، سن برادر میانی را y و سن برادر کوچک‌تر را z در نظر می‌گیریم: (۱) $x+y+z=36$

پول سه برادر بعد از مرحله‌ی اول به ترتیب برابر با $x+\frac{z}{4}$، $y+\frac{z}{4}$ و $\frac{z}{2}$ خواهد بود.

پول سه برادر بعد از مرحله دوم به ترتیب برابر با $\frac{16x+4y+5z}{16}, \frac{4y+z}{8}, \frac{4y+9z}{16}$ خواهد بود.

پول سه برادر بعد از مرحله‌ی سوم به ترتیب برابر با $\frac{16x+4y+5z}{32}, \frac{16x+36y+13z}{64}$ و $\frac{16x+20y+14z}{64}$ خواهد بود.

پس باید داشته باشیم:

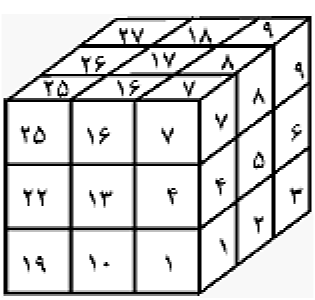
$$\frac{16x+20y+14z}{64}=\frac{16x+36y+13z}{64}=\frac{16x+4y+5z}{32} \qquad (2)$$

با مقایسه‌ی رابطه‌های (۲) و رابطه‌ی (۱) به جواب $x=19/5$ و $y=10/5$ و $z=6$ خواهیم رسید، پس $y=10/5$ می‌باشد.

راه‌حل دوم:

در پایان پول هر سه برادر باهم برابر شده است پس در پایان مرحله‌ی سوم هر کدام از آنان ۳٦۳ یعنی ۱۲ تومان خواهند داشت. قبل از این مرحله(پایان مرحله دوم) برادر بزرگ‌تر یقینا ۲ تومان داشته است(چون نصف پولش را برای خودش نگه داشته و نصف پولش را بین دو برادرش تقسیم کرده است.) چون برادر بزرگ‌تر نصف پولش را بین دو برادر دیگر به تساوی تقسیم کرده است پس به هرکدام از آنان ٦ تومان داده است. پس قبل از شروع مرحله‌ی پایانی پول برادر بزرگ‌تر ٢٤ تومان، پول برادر میانی ٦ تومان و پول برادر کوچک‌تر ٦ تومان بوده است. با همین استدلال در ابتدای مرحله‌ی دوم برادر بزرگ‌تر ۲۱ تومان، برادر میانی ۱۲ تومان و برادر کوچک‌تر ۳ تومان دارا هستند و بالاخره در ابتدای مرحله‌ی اول برادر بزرگ‌تر ۵/۱۹ تومان، برادر میانی ۵/۱۰ تومان و برادر کوچک‌تر ٦ تومان پول دارند.

٥- گزینه (۳) درست است.



مکعب کوچک را مطابق شکل از ۱ تا ۲۷ شماره‌گذاری می‌کنیم. ۲۷ مجموعه‌ی سه‌تایی عبارت‌اند از: {(۱,۲,۳),(٤,٥,٦),...,(۲٥,۲٦,۲۷),(۱,۱۰,۹),...,(۹,۱۸,۲۷),(۱,٤,۷),...,(۲۷,۲٤,۲۱)}

(مکعب‌هایی که فقط در یک وجه مشترک‌اند.)

۱۸ مجموعه‌ی سه‌تایی عبارت‌اند از: {(۱,٥,۹),(٥,۳,۷),(۱۰,۱٤,۱۸),...,(۳,۱٥,۲۷)}

و بالاخره ٤ مجموعه‌ی سه‌تایی عبارت‌اند از: {(۱,۱٤,۲۷),(۱۹,۱٤,۹),(۷,۱٤,۲۱),(۳,۱٤,۲٥)}

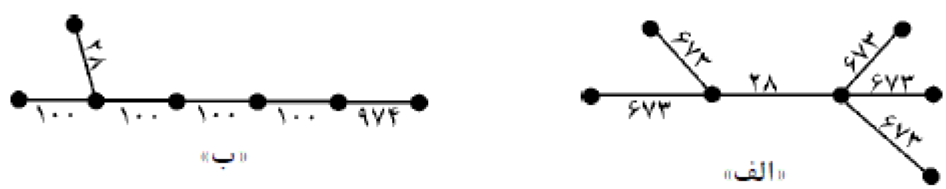
پس روی هم ٤۹ مجموعه‌ی سه‌تایی با خاصیت فوق موجود است.

۶- گزینه (٤) درست است.

تعداد اعداد بزرگ‌تر از ۵۹۹ با خاصیت مورد نظر برابر با $\binom{8}{1}\binom{9}{1}\binom{4}{1}$ یعنی ۲۸۸ عدد می‌باشد و تعداد اعداد بین ٦۰۰ و ۵۲۹ با خاصیت مورد نظر برابر $\binom{8}{1}\binom{6}{1}\binom{1}{1}$ یعنی ٤۸ عدد می‌باشد که مجموعا ۳۳٦ عدد می‌شود که اگر عدد ۵۳۰ را از این مجموعه خارج کنیم جواب مورد نظر یعنی ۳۳۵ به دست خواهد آمد.

۷- گزینه (٤) درست است.

برای گزینه‌های «۲» و «۳» و «۵» مثال نقضی مانند شکل «الف» و برای گزینه‌ی «۱» مثال نقضی مانند شکل «ب» وجود دارد. در ضمن شکل «ب» حداقل جاده‌ی ممکن را دارا می‌باشد.



۸- گزینه (۱) درست است.

تعداد حالات ممکن برابر تعداد جواب‌های صحیح معادله زیر است:

$$x_1+x_2+x_3+x_4=8 \qquad (x_1,x_4\ge 1 \quad , \quad x_2\le 2 \quad , \quad x_3\ge 2)$$

به این معنی که به نفر iام $x_i\,(i=1,2,3,4)$ کتاب برسد.

حالات باید تعداد جواب‌های معادله بالا را بیابیم.

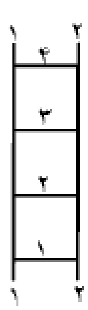
$$x_1+x_3+x_4=8-x_2 \qquad (x_1,x_4>0, x_3>1, x_2=0 \quad or \quad 1 \quad or \quad 2)$$

$$\Rightarrow number\quad of\quad answer = C(8-c_1-c_2-c_3-1\;,\;3-1)=C(8-x_2-0-0-1-1\;\;,2)$$

$$=C(6-x_2,2)=C(6,2)+C(5,2)+C(4,2)=15+10+6=31$$

۹- گزینه (؟) درست است.

نقشه‌ی خیابان‌ها شامل ۱۲ خیابان عمودی و ۱۲ خیابان افقی است. بدیهی است که برای رسیدن به گاراژها هر کدام از اتومبیل‌ها سه خیابان عمودی و در مجموع ۱۲ خیابان عمودی را طی می‌کنند. پس تمام ۱۲ خیابان عمودی توسط اتومبیل‌ها طی می‌شود. دو ستون اول را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم اتومبیل شماره ۱ از خیابان افقی شماره $i\ (1\le i\le 4)$ به سمت راست رفته و یکی از اتومبیل‌های دیگر از خیابان افقی شماره $j\ (1\le j\le 4)$ به سمت چپ برود. بدیهی است که i≠j. زیرا در غیر این صورت از این خیابان یک ماشین به سمت چپ و یک ماشین به سمت راست رفته است که مخالف فرض است. اگر i<j، آن‌گاه در ستون اول خیابان عمودی بین سطر i و j توسط هیچ



اتومبیلی طی نمی‌شود و اگر $i<j$، آن‌گاه در ستون اول خیابان عمودی بین سسطر i و j توسط دو اتومبیل طی می‌شود که مخالف فرض است. بدین ترتیب ثابت می‌شود که اتومبیل i فقط به گاراژ i می‌تواند برود.

۱۰- گزینه (۲) درست است.

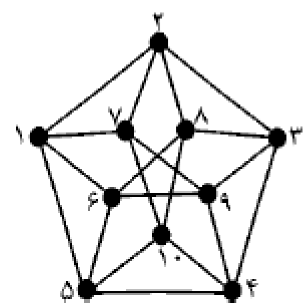
ماخ

از خانه‌ی (۰,۰) تا خانه‌ی (۱۳۷٤,۱۳۷٤) خانه در راستای عمودی و ۱۳۷٤ خانه در راستای عمودی و ۱۳۷٤ خانه در راستای افقی و در مجموع ۲۷٤۸ خانه فاصله وجود دارد. در هر حرکت سه خانه توسط اسب طی می‌شود، پس برای رسیدن به خانه‌ی مورد نظر حداقل $\frac{۲۷۴۸}{۳}$ یعنی ۹۱٦ حرکت لازم است. با ۹۱٦ حرکت می‌توان به خانه‌ی مورد نظر رسید. کافی است یک حرکت در راستای افقی(دو خانه در جهت افقی و یک خانه در جهت عمودی) و یک حرکت در راستای عمودی(دو خانه در جهت عمودی و یک خانه در جهت افقی) انجام داد و این عمل را ۹۱٦ مرتبه متوالیا تکرار کرد.

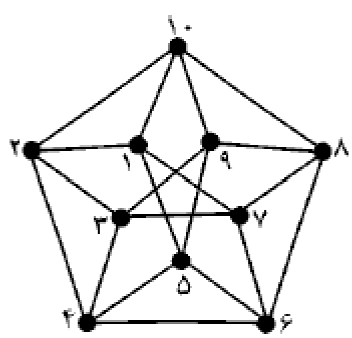
۱۱- گزینه (٤) درست است.

ماخ

گزینه‌ی «۱» صحیح است. کافی است راس‌های ۳،۱ و ۱۰ زرد باشند. راس‌های ۲ و ٤ سبز باشند. راس‌های ۸،۵ و ۹ قرمز باشند. و بالاخره راس‌های ٦ و ۷ آبی باشند.



گزینه‌ی «۲» نیز صحیح است. مطابق شکل زیر:



و بالاخره گزینه‌ی «۳» نیز صحیح است. مراحل رسم شکل به طریق زیر می‌باشد:

۱⇒۲⇒٤⇒٦⇒۸⇒۱۰⇒۲⇒۳⇒٤⇒۵⇒٦⇒۷⇒۸⇒۹⇒۱۰⇒۱⇒۵⇒۹⇒۳⇒۷⇒۱

۱۲- گزینه (۵) درست است.

ماخ

$A[۵] = ۵$

۱۳- گزینه (۳) درست است.

مسئله درست کردن هفت مجموعه‌ی سه عضوی از اشیا ، می‌باشد به طوری که هیچ دو مجموعه‌ای بیش زا یک عضو مشترک نداشته باشند. حداقل n می‌تواند ۷ باشد، زیرا اگر n برابر با ٦ باشد از شش عضو متمایز یکی از آنان حداقل در ٤ مجموعه تکرار شده است(زیرا اگر چنین نباشد حداکثر عضوها ٦×۳ یعنی ۱۸ عضو خواهد بود در صورتی که ۷ مجموعه روی هم ۲۱ عضو دارند.) این ٤ مجموعه را A_1 ،A_2 ،A_3 و A4 و عضو مشترک را a_1 در نظر می‌گیریم. اگر این چهار مجموعه علاوه بر a1 به ترتیب شامل a_2 ،a_4 ،a_5 باشند چون در a_1 مشترک هستند پس هیچ دو مجموعه‌ای از این ٤ مجموعه غیر از a_1 عضو مشترک دیگری نباید داشته باشند در صورتی که تنها عضو باقی‌مانده a_6 می‌باشد و ناچارا عضوهای سوم سه مجموعه از ٤ مجموعه عضوهای تکراری خواهند پذیرفت که تناقض است.

ثابت می‌کنیم اگر a=7 باشد این کار عملی است. نمونه‌ای از مجموعه‌های مطلوب عبارت‌اند از:

$A_1=\{a_1,a_2,a_3\}$ $A_2=\{a_1,a_4,a_5\}$ $A_3=\{a_1,a_6,a_7\}$

$A_4=\{a_2,a_4,a_6\}$ $A_5=\{a_2,a_5,a_7\}$ $A_6=\{a_3,a_4,a_7\}$

$A_7=\{a_3,a_5,a_6\}$

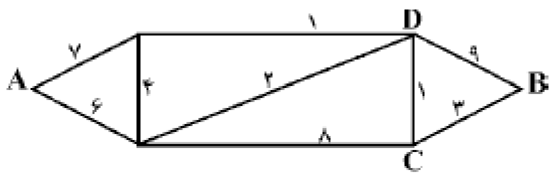
پس $n\geq 7$

۱٤- گزینه (۵) درست است.

به ٤ طریق زیر این کار عملی است:

۱۵- گزینه (۲) درست است.

با توجه به شکل مقابل حداکثر ٤ لی تر آب به نقطه‌ی D می‌رسد. پس از لوله‌ی DB که ظرفیت آن ۹ لیتر است حداکثر ٤ لیتر در ثانیه آب به مصرف‌کننده B سرازیر می‌شود. از لوله‌ی CB نیز که حداکثر ظرفیت آن ۳ لیتر است اگر ۳ لیتر در ثانیه آب به مصرف‌کننده B برسد حداکثر آبی که به مصرف‌کننده خواهد رسید ۷ لیتر در ثانیه می‌باشد.



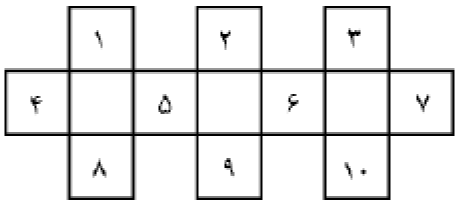
۱٦- یکی از راس‌های این ۱۹۹۵ ضلعی را A می‌نامیم. از A حرکت کرده و محیط چند ضلعی راطی می‌کنیم تا دوباره به A برگردیم. اگر مسیر حرکت را برداری در نظر بگیریم بدیهی است که مجموع بردارها صفر می‌باشد. درستی مطالب زیر واضح است:

۱. مجموع بردارهای در جهت راست با مجموع بردارهای در جهت چپ قرینه‌اند.

۲. مجموع بردارهای در جهت بالا با مجموع بردارهای در جهت پایین قرینه‌اند.

۳. اگر مجمو اندازه‌های بردارهای در سمت راست، چپ، بالا و پایین به ترتیب برابر با a،b،c و d باشند، آن‌گاه a=b و c=d و همچنین: $۱۹۹۵ = a+b+c+d = ۲a+۲c = ۲(a+c)$

چون a و c هر دو صحیح‌اند پس تساوی فوق هرگز نمی‌تواند برقرار باشد.



۱۷- ماخ برای از بین بردن مربع‌های ۱،۲،...و ۱۰ باید حداقل یکی از اضـلاع آن‌هـا حذف شود. چون این ده مربع هیچ ضلع مشترکی ندارند پس باید حداقل ۱۰ چوب کبریت حذف شود.

۱۸- ماخ مراحل بازی به شکل زیر است:

۱- بازیکن اول ٤ سنگ‌ریزه بر می‌دارد.

۲- بازیکن دوم i سنگ‌ریزه برمی‌دارد.

۳- اگر $i = ۴$ باشد، بازیکن اول ۲ سنگ‌ریزه دیگر بر می‌دارد و برنده می‌شود.

٤- اگر $i = ۳$ باشد، بازیکن اول ٤ سنگ‌ریزه دیگر بر می‌دارد و برنده می‌شود.

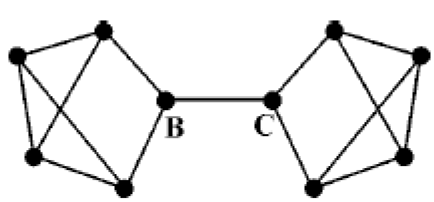
٥- اگر $i = ۲$ باشد، بازیکن اول ٤ سنگ‌ریزه دیگر بر می‌دارد و برنده می‌شود.

٦- اما اگر $i = ۱$ باشد، بازیکن اول ۱ سنگ‌ریزه بر می‌دارد. باز متناسب با این‌که بازیکن دوم در مرحله‌ی بعد چند سنگ‌ریزه بر دارد، حالات زیر پیش می‌آید:

- اگر بازیکن دوم ۱ سنگ‌ریزه بر دارد، بازیکن اول ۳ سنگ‌ریزه بر داشته و برنده می‌شود.
- اگر بازکن دوم ۲ سنگ‌ریزه بر دارد، بازیکن اول ۳ سنگ‌ریزه‌ی باقی‌مانده را بر داشته و برنده می‌شود.
- اگر بازیکن دوم ۳ سنگ‌ریزه بردارد، بازیکن اول ۱ سنگ‌ریزه بر داشته و برنده می‌شود.
- اگر بازیکن دوم ٤ سنگ‌ریزه بر دارد، بازیکن اول تنها سنگ‌ریزه‌ی باقی‌مانده را بر داشته و برنده می‌شود.

۱۹- ماخ بدون این‌که به کلیت مسئله لطمه‌ای وارد شود $a_۰$ را A و $a_۱$ را B در نظر می‌گیریم. $a_۲$ نمی‌تواند B باشد(شرط اول)، A نیز نمی‌تواند باشد(زیرا در غیر این صورت $a_۰$ و $a_۲$ متفاوت نمی‌شوند)، پس $a_۲ = C$. $a_۳$ نمی‌تواند A باشد(چون $a_۰$،...،$a_۳$ باید متنوع باشد)، C نیز نمی‌تواند باشد(شرط اول)، پس $a_۳ = B$. $A_۴$ نمی‌تواند B باشد(شرط اول) C نیز نمی‌تواند باشد(چون $a_۲$ و $a_۴$ طبق شرط دوم باید متنوع باشند) واما $a_۴$، A نیز نمی‌تواند باشد زیرا دراین صورت دنباله‌ی $a_۰, a_۲, a_۴, \ldots$ به صورت A,C,A,... در می‌آید که اگر آن را به صورت $b_۰, b_۱, b_۲, \ldots$ در نظر بگیریم چون $b_۰ = b_۲$ می‌شود، پس متنوع نیست.

۲۰- ماخ اگر نقشه‌ی شبکه به شـکـل زیر باشد با بستن مسیر BC ارتباط شهرهای سمت چپ با شهرهای سمت راست قطع خواهد شد.



۲۱- اگر a_0 یکی از اعداد یک رقمی باشد حکم واضح است. حال ثابت می‌کنیم اگر حکم برای اعداد از ۱ تا k برقرار باشد، برای k+1 نیز برقرار است. اگر رقم آخر عدد (k+1) کوچک‌تر یا مساوی با ۵ باشد با کنار گذاشتن آن رقم، عدد حاصل کوچک‌تر از(k+1) خواهد بود و طبق فرض ادامه‌ی فرایند پایان‌پذیر خواهد بود. و اما اگر رقم آخر عدد (k+1) بزرگ‌تر از ۵ باشد در این صورت $۹(k+۱)$ به یکی از ارقام ۳،۲،۱ و ٤ ختم خواهد شد که با کنار گذاشتن این رقم حاصل از k+1 کوچک‌تر خواهد بود و باز بنا به فرض این فرایند پایان‌پذیر خواهد بود.

۲۲- لم: اولین بازیکنی که یک مهره در یکی از خانه‌های $i (i \leq ۴)$ قرار دهد بازنده است.
اثبات: حالات زیر را در نظر می‌گیریم:

۱- بازیکن x یک مهره در خانه‌ی ۱ قرار می‌هد در این صورت بازیکن y مهره‌ی دیگر را در خانه‌ی ۲ قرار داده و برنده می‌شود.

۲- بازیکن x یک مهره در خانه‌ی ۲ قرار می‌دهد. در این صورت بازیکن y مهره‌ی دیگر را در خانه‌ی ۱ قرار داده و برنده می‌شود.

۳- بازیکن x مهره‌ی A را در خانه‌ی ۳ قرار می‌دهد. در این صورت بازیکن y مهره‌ی B را در خانه‌ی ٤ قرار می‌دهد، حال اگر x یکی از مهره‌ها را در خانه‌ی ۱(یا ۲) قرار دهد، آن‌گاه y مهره‌ی دیگر را در خانه‌ی ۲(یا ۱) قرار داده و برنده می‌شود.

٤- بازیکن x مهره‌ی A را در خانه‌ی ٤ قرار می‌دهد. در این صورت بازیکن y مهره‌ی B را در خانه‌ی ۳ قرار می‌دهد و همانند بند ۳ واضح است که y برنده می‌شود.

طریقه‌ی بازی: بازیکن اول مهره‌ی موجود در خانه‌ی شماره ۹ را در خانه‌ی ۷ قرار می‌دهد. بازیکن دوم به دو طریق زیر می‌تواند بازی کند(با توجه به لم واضح است که اگر یکی از مهره‌ها را در یکی از خانه‌های ۱ تا ٤ قرار دهد بازنده می‌شود):

۱- یکی از مهره‌ها را در خانه‌ی ٦ قرار می‌دهد. در این صورت بازیکن اول مهره‌ی دیگر را در خانه‌ی شماره ۵ قرار می‌دهد اینجاست که بازیکن دوم به ناچار یکی از مهره‌ها را در یکی از خانه‌های ۱ تا ٤ قرار می‌دهد و با توجه به لم، بازنده می‌شود.

۲- یکی از مهره‌ها را در خانه‌ی ۵ قرار می‌دهد. در این صورت بازیکن اول مهره‌ی دیگر را در خانه‌ی شماره ٦ قرار می‌دهد. سپس بازیکن دوم به ناچار یکی از مهره‌ها را در یکی از خانه‌های ۱ تا ٤ قرار داده و با توجه به لم، بازنده می‌شود.

۲۳- با توجه به اطلاعات مسئله می‌توان نتیجه گرفت که:

$$g(۲) > f(۲) = g(۱) > f(۳) > f(۱) = g(۳)$$

بدیهی است که بی نهایت تابع با شرایط فوق می‌توان در نظر گرفت به عنوان مثال:

$$f : \{(۱,۲),(۲,۱۰),(۳,۶)\} \; g : \{(۱,۱۰),(۲,۲۰),(۳,۲)\}$$

۲۹- به عنوان مثال اگر اعداد ما ٤،۱۰،۲۰ و ۲ بوده و $x = ۲۰$ باشد به سادگی قابل بررسی است که این االگوریتم در خروجی خود عدد $x = ۲۰$ را عضوی از آرایه‌ی a معرفی نخواهد کرد.

۳۰- اگر آرایه‌ی a با همان عناصر مثال قبل فرض شود و $x = ۱۰$باشد، باز خروجی الگوریتم چنان است که $x = ۱۰$ در آرایه‌ی a موجود نیست.